El Modelo Estocástico de Crecimiento

Mauricio Tejada

ILADES - Universidad Alberto Hurtado

Segundo Semestre de 2018

Procesos de Markov

Representación: Tiempo e Incertidumbre

- Incertidumbre en t
  - Espacio de Estados (S): conjunto de posibles estados (o eventos) de la naturaleza en t.
  - Notación: $s_t \in S$ es una realización.
  - Ejemplo: $S = \{1, 2\}$ y $\{1 = \text{nieve}, 2 = \text{no nieve}\}$
- Incertidumbre en el tiempo:
  - Existen T períodos ($T \leq \infty$)
  - La historia desde 0 a t es: $s^t = (s_0, s_1, ..., s_t)$
- Arbol de eventos: Definición descriptiva (no rigurosa pero útil)
  - Cada historia (s^t) hasta t se denomina "fecha del evento" o "nodo" del árbol.
  - Para $t = 0$, $s_0 \in S$ es conocido (s_0 se denomina "raíz" del árbol).
  - Para $t = T$, s^T se denomina "nodo terminal" del árbol.
  - Árbol de eventos: Gráfico con todos los nodos.

Variables Aleatorias y Proceso Estocástico

- Probabilidad en cada Nodo:
  - Probabilidad no condicional para el nodo s^t: $\pi_t\left(s^t\right)$
  - Probabilidad condicional para el s^t en s^τ ($\tau \leq t$): $\pi_t\left(s^t | s^\tau\right)$
- Variable aleatoria en t
  - Definición: Se denomina "variable aleatoria" a una función de estados (S) en el momento t
  - Notación: $z_t\left(s_t\right)$ es una variable aleatoria en el momento t contingente en el estado s_t
  - Ejemplo: Shocks de tecnología (1 =Eficiencia baja ; 2 =Eficiencia alta, etc)
- Proceso estocástico: Colección de variables aleatorias a través del tiempo, $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$, es denominada proceso estocástico.

Definición de Procesos de Markov

- Propiedad de Markov: Se dice que un proceso estocástico $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ tiene la *propiedad de markov* si para todo $k \geq 1$ y todo t,

$$\Pr(x_{t+1}|x_t, x_{t-1}, ..., x_{t-k}) = \Pr(x_{t+1}|x_t).$$

- Un *proceso de Markov* es un proceso estocástico que tiene la propiedad de Markov.
- Existen dos tipo de procesos de Markov:
  - Procesos definidos sobre un espacio de estados discreto *(Cadenas de Markov)*.
  - Procesos definidos sobre un espacio de estados continuo.

Definición de Procesos de Markov

Definición (*Cadenas de Markov:*)

Una cadena de Markov es un proceso de Markov discreto definido por una tripleta de objetos:

1. *Espacio de Estados* S*:* $S = \{1, 2, ..., n\}$
2. *Una matriz* $(n \times n)$ *de transición P (a.k.a. matriz estocástica):* $P(i,j) = \Pr(x_{t+1} = j|x_t = i)$
3. *Un vector* $(n \times 1)$ *con la distribución inicial* π_0*:* $\pi_0(i) = \Pr(x_0 = i)$

Nota: n puede ser finito o infinito.

Ejemplos de Cadenas de Markov

- Ejemplo I:

$$\begin{aligned} S &= \{1,2\} \\ P &= \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}, \\ \pi_0 &= \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- ¿Que significa que una cadena de Markov muestre dependencia?
- Ejemplo II: *matriz doble estocástica*

$$\begin{aligned} S &= \{1,2\} \\ P &= \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}, \\ \pi_0 &= \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- ¿Qué significa matriz doble estocástica?

Cadenas de Markov: Probabilidad No Condicional

- Sea el vector $n \times 1$, $\pi_t = (\pi_t(1), \pi_t(2), ..., \pi_t(n))'$ la distribución de la cadena en el momento t, donde:

$$\pi_t(i) = \Pr(x_t = i).$$

- La ley de la probabilidad total implica:

$$\begin{aligned} \pi_1(j) &= \Pr(x_1 = j) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(x_0 = i) \Pr(x_1 = j | x_0 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \pi_0(i) P(i,j) \end{aligned}$$

- En notación matricial:

$$\pi_1' = \pi_0' P$$

- En general tenemos:

$$\pi_{t+1}' = \pi_t' P$$

Cadenas de Markov: Estacionariedad Asintótica

- Preguntas:
  - ¿Cuántas distribuciones estacionarias tiene una cadena de Markov?
  - ¿Si empezamos con una distribución arbitraria π_0, es posible tener que

$$\lim_{t\to\infty} \pi_t = \lim_{t\to\infty} \pi_0' P^t = \pi_\infty ?$$

- Respuesta: Todo depende de P!

Teorema (Estacionariedad Asintótica)

Sea P una matriz estocástica con $P(i,j) > 0\ \forall (i,j)$. Entonces P tiene una única distribución estacionaria (π_∞) y $\lim_{t\to\infty} \pi_t = \lim_{t\to\infty} \pi_0' P^t = \pi_\infty$ para cada distribución inicial π_0.

Cadenas de Markov: Estacionariedad Asintótica

- Como calcular la distribución estacionaria:
  - Método I: Resolver el sistema $(I - P')\pi_\infty = 0$
  - Método II: Usando autovalores y autovectores.
  - Método III: Adivinar y verificar e Iteración.
- Ejemplo: de nuevo la matriz doble estocástica.

$$\begin{aligned} S &= \{1,2\} \\ P &= \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}, \\ \pi_0 &= \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Usando iteración y empezando en π_0:

Iter	1	2	3	4	...	9	10
$s=1$	0.620	0452	0.5192	0.4923	...	0.5001	0.5
$s=2$	0.380	0.548	0.4808	0.5077	...	0.4999	0.5

De un Estado Discreto a uno Continuo

- No hay diferencias sustanciales.
- Conceptualmente si necesitamos hacer cambios:
  - El espacio de estados S es un conjunto (contiene un continuo de estados)
  - La distribución inicial π_0 es una *densidad*:

$$\pi_0(s) = \Pr(s_0 = s)$$

  - La matriz de *transición* P es una *densidad de transición (condicional)*

$$\pi(s'|s) = \Pr(s_{t+1} = s'|s_t = s)$$

- En un espacio continuo las "sumas" son "integrales"
  - La densidad no condicional evoluciona de acuerdo:

$$\pi_{t+1}(s_{t+1}) = \int_{s_t} \pi_t(s_t)\,\pi(s_{t+1}|s_t)\,ds_t$$

Ejemplo: Proceso AR (1)

- Ejemplo: Un proceso autorregresivo o AR(1) $\{z_t\}_{t=0}^{\infty}$ se define como:

$$z_{t+t} = (1-\rho)\mu + \rho z_t + \epsilon_{t+1}$$

  donde $\epsilon_{t+1} \sim f(\epsilon)$ es una variable aleatoria continua i.i.d.. Por ejemplo, $\epsilon_{t+1} \sim N(0,1)$. Entonces:

$$z_{t+1}|z_t \sim N((1-\rho)\mu + \rho z_t, 1)$$

- Note la propiedad de Markov:

$$\Pr(z_{t+1}|z_t, z_{t-1}, ...) = \Pr(z_{t+1}|z_t)$$

- Ejemplo: z_t es un shock tecnológico y

$$\log(z_{t+1}) = 0.95 \log(z_t) + w_{t+1},$$

  donde $w_{t+1} \sim N(0,1)$.

Modelo Estocástico de Crecimiento

- Introduzcamos incertidumbre en el modelo neoclásico de crecimiento
- Suponga que la incertidumbre está asociada a shocks tecnológicos ($\{z_t\}_{t=0}^{\infty}$). El problema del Planificador Central es:

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} U(c_0, c_1, ..., c_\infty)$$
$$s.t.\ c_t + k_{t+1} \leq z_t F(k_t, n_t) + (1-\delta)k_t,\ t = 0, 1, 2, ..., \infty$$
$$k_0 \in X,\ z_0 \in Z \text{ dado.}$$

- En un ambiente de incertidumbre el concepto adecuado es el de *utilidad esperada*:

$$U(c_0, c_1, ...c_\infty) = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right\},$$

donde $E_0(\cdot) := E(\cdot|z_0)$ es la esperanza condicional en la información disponible en $t = 0$ (i.e., z_0).
- La solución del problema son planes contingentes: $k_{t+1} = g_k(k_t, z_t)$ y $c_t = g_c(k_t, z_t)$ [Funciones de Política].

Modelo Estocástico de Crecimiento

- Si bien intuitiva, la formulación anterior es un poco vaga. Por ejemplo, escribimos como $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{T}$ a las variables de elección. ¿Pero como se pueden elegir solamente $T + 1$ valores?
- En un mundo estocástico, cada nodo en el árbol de eventos corresponde a una fecha en el caso deterministico. En $t = 0$, las personas eligen un *plan contingente* de consumo e inversión para cada periodo.
- Algunos eventos no ocurren ex-post t por tanto algunas elecciones de consumo e inversión no ocurren tampoco. Ex ante sin embargo, se tiene que considerar todos los escenarios posibles.
- Para resaltar la naturaleza estocástica del problema, vamos a escribir una versión más completa del mismo. Recordemos que la historia de shocks hasta t es $s^t = (s_0, s_1, ..., s_t)$. Con esta notación las elecciones contingentes al evento s^t pueden escribirse como $\left(c_t\left(s^t\right), k_{t+1}\left(s^t\right)\right)$.

Modelo Estocástico de Crecimiento

- Tomando las consideraciones anteriores, el problema del Planificador puede escribirse como:

$$\max_{\{c_t(s^t),k_{t+1}(s^t)\}_{t=0}^{T}} E_0\left\{\sum_{t=0}^{T}\beta^t u\left(c_t\left(s^t\right)\right)\right\}$$
$$s.t.\ c_t\left(s^t\right)+k_{t+1}\left(s^t\right)\leq f\left(k_t\left(s^{t-1}\right),z_t\left(s^t\right)\right),\ \forall s^t$$
$$k_0\in X,\ z_0\in Z \text{ given.}$$

- Si $s_t \in S$ sólo toma un número finito de valores, la expectativa puede escribirse explícitamente:

$$\begin{aligned} E_0\left\{\sum_{t=0}^{T}\beta^t u\left(c_t\left(s^t\right)\right)\right\} &= \sum_{t=0}^{T}\beta^t E_0\left[u\left(c_t\left(s^t\right)\right)\right] \\ &= \sum_{t=0}^{T}\beta^t \sum_{s^t}\pi_t\left(s^t\right)u\left(c_t\left(s^t\right)\right) \end{aligned}$$

Modelo Estocástico de Crecimiento

- Ejemplo: sea $T=1$, $S=\{1,2\}$, $z_t\in\{z_1,z_2\}$, $s_0=1$. La función objetivo se transforma en:

$$u\left(c_0\left(1\right)\right)+\beta\left[\pi_1\left(1,1\right)u\left(c_1\left(1,1\right)\right)+\pi_1\left(1,2\right)u\left(c_1\left(1,2\right)\right)\right]$$

y las restricciones son

$$\begin{aligned} c_0\left(1\right)+k_1\left(1\right) &\leq f\left(k_0,z_0\left(1\right)\right), \\ c_1\left(1,1\right)+k_2\left(1,1\right) &\leq f\left(k_1\left(1\right),z_1\left(1,1\right)\right), \\ c_1\left(1,2\right)+k_2\left(1,2\right) &\leq f\left(k_1\left(1\right),z_1\left(1,2\right)\right). \end{aligned}$$

- Las variables de elección son:

$$\left\{c_0\left(1\right),c_1\left(1,1\right),c_1\left(1,2\right),k_1\left(1\right),k_2\left(1,1\right),k_2\left(1,2\right)\right\}.$$

- ¿Cuantas restricciones tenemos? ¿Cuantos niveles de consumo y capital se deben elegir? Compare con el número de nodos en el árbol de eventos.

Modelo Estocástico de Crecimiento

El Problema Secuencial

- Retomemos el problema del Planificador Central simplificando notación (pero manteniendo en mente la idea de planes contingentes):

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{T}} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right\}$$
$$s.t.\ c_t + k_{t+1} = z_t F(k_t, n_t) + (1-\delta) k_t,\ t = 0, 1, 2, ..., T$$
$$k_0 \in X,\ z_0 \in Z \text{ dado.}$$

- El Lagrangeano en esta especificación estocástica es:

$$\ell_0 = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) + \lambda_t \left(z_t F(k_t, n_t) + (1-\delta) k_t - c_t - k_{t+1} \right) \right\}$$

- El operador de expectativas es lineal, entonces es posible diferenciar.
- Las CPO son para c_0 y k_1:

$$\begin{aligned} c_0 &: \quad E_0 \left\{ u'(c_0) - \lambda_0 \right\} = 0 \\ k_1 &: \quad \beta E_0 \left\{ -\lambda_0 + \beta \lambda_1 \left(z_1 F_k(k_1, n_1) + 1 - \delta \right) \right\} = 0 \\ \lambda_0 &: \quad z_0 F(k_0, n_0) + (1-\delta) k_0 - c_0 - k_1 = 0 \end{aligned}$$

Modelo Estocástico de Crecimiento

El Problema Secuencial

- k_0 y z_0 son conocidos al elegir c_0 y k_1.
- Dado que c_0 y k_1 son no estocásticos, y por tanto el multiplicador λ_0 tampoco lo es, tenemos:

$$\begin{aligned} u'(c_0) &= \lambda_0 \\ \lambda_0 &= \beta E_0 \left\{ \lambda_1 \left(z_1 F_k(k_1, n_1) + 1 - \delta \right) \right\} \end{aligned}$$

- Consideremos ahora el problema desde $t = 1$ en adelante:

$$\ell_1 = E_1 \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t) + \lambda_t \left(z_t F(k_t, n_t) + (1-\delta) k_t - c_t - k_{t+1} \right) \right\}$$

- De la misma forma que antes:

$$\begin{aligned} u'(c_1) &= \lambda_1 \\ \lambda_1 &= \beta E_1 \left\{ \lambda_2 \left(z_2 F_k(k_2, n_2) + 1 - \delta \right) \right\} \end{aligned}$$

Modelo Estocástico de Crecimiento
El Problema Secuencial

- Siguiendo de la misma forma para $t = 2, 3, ...$ tenemos que para cualquier t:

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \lambda_t \\ \lambda_t &= \beta E_t \left\{\lambda_{t+1}\left(z_{t+1}F_k\left(k_{t+1}, n_{t+1}\right) + 1 - \delta\right)\right\} \\ 0 &= z_t F\left(k_t, n_t\right) + (1-\delta)k_t - c_t - k_{t+1} \end{aligned}$$

- Tenemos la Ecuación de Euler Estocástica:

$$\beta E_t \left\{\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\left(z_{t+1}F_k\left(k_{t+1}, n_{t+1}\right) + 1 - \delta\right)\right\} = 1$$

  más la restricción de recursos:

$$z_t F\left(k_t, n_t\right) + (1-\delta)k_t = c_t + k_{t+1}$$

- Adicionalmente, y de manera análoga al caso determinístico, tenemos la CTV:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t E_t \lambda_t k_{t+1} = 0$$

Modelo Estocástico de Crecimiento
Programación Dinámica

- Aplicando el principio de optimalidad al problema secuencial tenemos:

$$\begin{aligned} v(k_0, z_0) &= \max_{\left\{c_t, k_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}} E\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u\left(c_t\right)|z_0\right\} \\ &= \max_{c_0, k_1, \left\{c_t, k_{t+1}\right\}_{t=1}^{\infty}} E\left\{u\left(c_0\right) + \sum_{t=1}^{\infty}\beta^t u\left(c_t\right)|z_0\right\} \\ &= \max_{c_0, k_1} u\left(c_0\right) + \beta \max_{\left\{c_t, k_{t+1}\right\}_{t=1}^{\infty}} E\left\{\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1} u\left(c_t\right)|z_0\right\} \end{aligned}$$

- Por la ley de expectativas iteradas: $E\left[E\left[\cdot|z_1\right]|z_0\right] = E\left[\cdot|z_0\right]$ dado $z_0 \subset z_1$

$$v(k_0, z_0) = \max_{c_0, k_1} u\left(c_0\right) + \beta \max_{\left\{c_t, k_{t+1}\right\}_{t=1}^{\infty}} E\left\{E\left\{\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1} u\left(c_t\right)|z_1\right\}|z_0\right\}$$

- Entonces:

$$v(k_0, z_0) = \max_{c_0,k_1} u\left(c_0\right) + \beta E\left\{\max_{\left\{c_t,k_{t+1}\right\}_{t=1}^{\infty}} E\left\{\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}u\left(c_t\right)|z_1\right\}|z_0\right\}$$

- Note que:

$$v\left(x_1, z_1\right) = \max_{\left\{c_t,k_{t+1}\right\}_{t=1}^{\infty}} E\left\{\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}u\left(c_t\right)|z_1\right\}$$

- Tenemos la ecuación de Bellman en el contexto estocástico:

$$v(k_0, z_0) = \max_{c_0,k_1} u\left(c_0\right) + \beta E\left\{v\left(k_1, z_1\right)|z_0\right\}$$

- En general tenemos:

$$v(k_t, z_t) = \max_{c_t,k_{t+1}} u\left(c_t\right) + \beta E_t\left\{v\left(k_{t+1}, z_{t+1}\right)\right\}$$

- Por espacio hemos omitido la restricción:
  $c_t + k_{t+1} = z_t F\left(k_t, n_t\right) + (1-\delta)k_t$.
- El término de expectativa con un espacio de estados discreto es:

$$E\left\{v\left(k_{t+1}, z_{t+1}\right)|z_t = z_i\right\} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} v\left(k_{t+1}, z_{t+1} = z_j\right)$$

- En un espacio de estados continuo tenemos ($z \in [a, b]$):

$$E\left\{v\left(k_{t+1}, z_{t+1}\right)|z_t\right\} = \int_a^b v\left(k_{t+1}, z_{t+1}\right)\pi\left(z_{t+1}|z_t\right)dz_{t+1}$$

Modelo Estocástico de Crecimiento
Programación Dinámica

- Reemplazando la restricción en la ecuación de Bellman tenemos:

$$v(k_t, z_t) = \max_{k_{t+1}} u\left(z_t F\left(k_t, n_t\right) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}\right) + \beta E_t\left\{v\left(k_{t+1}, z_{t+1}\right)\right\}$$

- La CPO es:

$$-u'\left(z_t F\left(k_t, n_t\right) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}\right) + \beta E_t\left\{v_k\left(k_{t+1}, z_{t+1}\right)\right\} = 0$$

- Usando el teorema de la envolvente:

$$v_k(k_t, z_t) = u'\left(z_t F\left(k_t, n_t\right) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}\right)\left(z_t F_k\left(k_t, n_t\right) + 1 - \delta\right)$$

- Tomando un período adelante y aplicando expectativas:

$$E_t\left\{v_k(k_{t+1}, z_{t+1})\right\} = E_t\left\{u'\left(z_{t+1} F\left(k_{t+1}, n_{t+1}\right) + (1-\delta)k_{t+1} - k_{t+2}\right)\left(z_{t+1} F_k\left(k_{t+1}, n_{t+1}\right) + 1 - \delta\right)\right\}$$

- Entonces tenemos la ecuación de Euler estocástica:

$$\beta E_t\left\{\frac{u'(z_{t+1} F\left(k_{t+1}, n_{t+1}\right) + (1-\delta)k_{t+1} - k_{t+2})}{u'(z_t F\left(k_t, n_t\right) + (1-\delta)k_t - k_{t+1})}\left(z_{t+1} F_k\left(k_{t+1}, n_{t+1}\right) + 1 - \delta\right)\right\} = 1$$

Métodos de Solución

- Los métodos basados en la Función Valor:
  - Adivinar y Verificar la Función Valor.
  - Iteración de la Función Valor.
- Métodos Basados en la Ecuación de Euler Estocástica
  - Adivinar y Verificar la Función de Política.
  - Iteración de la Función de Política.
  - Linealización de ecuación de Euler (Métodos de Perturbación).
    - Métodos de Linealización.
    - Métodos para resolver sistema de ecuaciones en diferencias estocásticas que contienen expectativas.

Métodos de Solución

Métodos basados en la Función Valor: Adivinar y Verificar

- Brock and Mirman (1972): Generalización del modelo neoclásico de crecimiento y el punto de partida para los modelos de Ciclos Económico Reales.
- Base: Modelo neoclásico con mercados completos. Las familias pueden usar commodities tipo Arrow-Debreu para asegurarse contra riesgo idiosincrático. Entonces, la fuente interesante de incertidumbre son los shocks agregados.
- El Modelo:

$$u(c) = \log(c)\,,\ f(k,z) = zk^{\alpha},\ z \text{ i.i.d. and } E(\log(z)) = \mu$$

- El Planificador resuelve:

$$v(k,z) = \max_{0 \leq k' \leq zk^{\alpha}} \left\{ \log\left(zk^{\alpha} - k'\right) + \beta E\left[v\left(k', z'\right)|z\right] \right\}$$

- Usemos primero el método de *Adivinar y Verificar la Función Valor:*

$$v(k,z) = C + F\log(k) + G\log(z)$$

Métodos de Solución

Métodos basados en la Función Valor: Adivinar y Verificar

- En la ecuación de Bellman tenemos:

$$\begin{aligned} v(k,z) &= \max_{0<k'<zk^{\alpha}} \left\{ \log\left(zk^{\alpha} - k'\right) + \beta\left(C + F\log\left(k'\right) + G\mu\right) \right\}, \\ \Longrightarrow \quad v(k,z) &= \max_{0<k'<zk^{\alpha}} \left\{ \log\left(zk^{\alpha} - k'\right) + \beta\left[\left(C + G\mu\right) + F\log\left(k'\right)\right] \right\} \end{aligned}$$

- Tenemos la misma forma que en el caso determinístico. Las CPO llevan a:

$$k' = \frac{\beta F}{1+\beta F} A k^{\alpha}.$$

- Usando esta solución para comparar el lado izquierdo y el lado derecho de la ecuación de Bellman tenemos la solución:

$$\begin{aligned} C &= \left[\log(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta\ln(\alpha\beta)}{1-\alpha\beta} + \frac{\beta\mu}{1-\alpha\beta}\right](1-\beta)^{-1}, \\ F &= \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}, \\ G &= \frac{1}{1-\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Métodos de Solución

Métodos basados en la Función Valor: Iteración de la FV

- En el método *Iteración de la Función Valor* el procedimiento es exactamente el mismo que en el caso determinístico.
- Supongamos que iniciamos la iteración con:

$$v_0\left(k,z\right)=0,\forall k,z$$

- Resolvemos la ecuación de Bellman con el método Adivinar y Verificar

$$v_1(k,z)=\max_{k'} u\left(f\left(k,z\right)-k'\right)+\beta E\left[v_0\left(k',z'\right)|z\right]$$

- Si $v_1\left(k,z\right)=v_0\left(k,z\right),\forall k,z$, tenemos la solución, sino continuamos iterando:

$$v_2(k,z)=\max_{k'} u\left(f\left(k,z\right)-k'\right)+\beta E\left[v_2\left(k',z'\right)|z\right]$$

- En general para $j=0,1,2...$

$$v_{j+1}(k,z)=\max_{k'} u\left(f\left(k,z\right)-k'\right)+\beta E\left[v_j\left(k',z'\right)|z\right]$$

Métodos de Solución

Métodos Basados en la Ecuación de Euler Estocástica: Métodos de Perturbación

- Sistema de ecuaciones en diferencias no lineales estocásticas:

$$\begin{aligned}\beta E_t\left\{\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}f'(k_{t+1},z_{t+1})\right\} &= 1\\ f(k_t,z_t)-c_t-k_{t+1} &= 0\end{aligned}$$

- La idea de los métodos de perturbación es encontrar soluciones aproximadas para las funciones de política (válidas alrededor de un punto en particular).
- Estos métodos cubre una amplia gama de modelos, incluyendo aquellos en los cuales la asignación del mercado no es Pareto óptima.
- Las referencias:
  - Referencia clásica: Blanchard y Kahn (1980). Sobre el trabajo de ellos, Klein (2000) propone una descomposición más general.
  - La aplicación del método de coeficientes indeterminados es descrita en Uhlig (1997).

Procedimiento General:

1. Plantear el problema de optimización de los distintos agentes y encontrar el sistema de ecuaciones en diferencias no lineales estocásticas que definen la dinámica de modelo.
2. Encontrar el estado estacionario determinístico del modelo (esto es, manteniendo el valor de los shocks en los de largo plazo).
3. Aplicar una aproximación de Taylor de primer orden alrededor del estado estacionario (puede ser aproximación logarítmica o no).
4. Expresar el sistema de ecuaciones en diferencias lineales diferenciando variables de control y de estado (endógenas y exógenas).
5. Expresar el sistema en representación matricial para aplicar el método de solución (los métodos de BK y de Uhlig difieren en este paso).
6. Derivar las funciones de política o reglas de decisión óptima aplicando alguna descomposición matricial (difiere de nuevo en cada método).

Métodos de Solución
Métodos Basados en la Ecuación de Euler Estocástica: Métodos de Perturbación

- **Paso 1:** Sistema de ecuaciones en diferencias no lineales estocásticas:

$$\begin{aligned} \beta E_t \left\{ \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} f'(k_{t+1}, z_{t+1}) \right\} &= 1 \\ f(k_t, z_t) - c_t - k_{t+1} &= 0 \end{aligned}$$

- Ejemplo:

$$\begin{aligned} u(c_t) &= \log(c_t), \\ f(k_t, z_t) &= z_t k_t^{\alpha}, \\ \log(z_{t+1}) &= \rho \log(z_t) + \epsilon_{t+1},\ \epsilon_{t+1} \sim iid\ N\left(0, \sigma^2\right) \end{aligned}$$

- Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_t} &= \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} \alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} \right] \\ c_t &= z_t k_t^{\alpha} - k_{t+1} \end{aligned}$$

Métodos de Solución
Métodos Basados en la Ecuación de Euler Estocástica: Métodos de Perturbación

- **Paso 2:** EE $c_t = c_{t+1} = c^*$, $k_t = k_{t+1} = k^*$ y $z_t = z_{t+1} = z^*$:

$$\begin{aligned} \beta f'(k^*, z^*) &= 1 \\ f(k^*, z^*) - c^* - k^* &= 0 \end{aligned}$$

- En el ejemplo:

$$\begin{aligned} & \log(z_{t+1}) = \rho \log(z_t) + \epsilon_{t+1} \\ \Rightarrow \quad & \log(z^*) = \rho \log(z^*) + 0 \\ \Rightarrow \quad & \log(z^*) = 0 \\ \Rightarrow \quad & z^* = 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & u'(c^*) = \beta u'(c^*) \left(\alpha z^* (k^*)^{\alpha - 1} \right) \\ \Longrightarrow \quad & k^* = (\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

adicionalmente:

$$c^* = (\alpha\beta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Métodos de Solución
Métodos Basados en la Ecuación de Euler Estocástica: Métodos de Perturbación

- **Paso 3:** Linealizar (o log-linealizar) las CPO del modelo. Se aplica la aproximación de Taylor de primer orden. Esto ya lo vimos en el capítulo 2. Escribamos el sistema en forma implícita:

$$\Phi(k_{t+1}, c_{t+1} k, c_t) = 0$$

- Para log-linealizar el sistema reemplace cada variable por $x_{t+i} = x^* e^{\hat{x}_{t+i}}$ donde $\hat{x}_{t+i} = \ln x_{t+i} - \ln x^*$ para $x = (z, k, c)$ e $i = 0, 1$. Esto es:

$$\Phi(z^* e^{\hat{z}_{t+1}}, k^* e^{\hat{k}_{t+1}}, c^* e^{\hat{c}_{t+1}}, z^* e^{\hat{z}_t}, k^* e^{\hat{k}_t}, c^* e^{\hat{c}_t}) = 0$$

- Calcular la matriz Jacobiana de Φ con respecto a $\hat{x}_{t+i}$ para $x = (z, k, c)$ e $i = 0, 1$. Note que la matriz Jacobiana tiene la siguiente característica en la aproximación lineal.

$$A \begin{bmatrix} \hat{z}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \\ E_t \hat{c}_{t+1} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \hat{z}_t \\ \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix} + C v_{t+1} = 0$$

donde $A = \Phi_1'$ y $B = \Phi_2'$.

- Entonces el sistema log-linealizado es:

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \\ E_t\hat{c}_{t+1} \end{bmatrix} = -A^{-1}B \begin{bmatrix} \hat{z}_t \\ \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix} - A^{-1}Cv_{t+1} = F \begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \\ \hat{n}_t \end{bmatrix} + Gv_{t+1}$$

- Para el ejemplo definamos:

$$\widehat{z}_t = z_t - z^*, \widehat{k}_t = k_t - k^*, \widehat{c}_t = c_t - c^*$$

- Tips útiles para log-linealizar:

$$\begin{aligned} \theta X_t &= \theta X^* e^{\hat{x}_t} \Longrightarrow \theta X^* e^0 + \theta X^* e^0 \hat{x}_t = \theta X^*(1+\hat{x}_t) \\ X_t^\gamma &= X^{*\gamma} e^{\gamma\hat{x}_t} \Longrightarrow X^{*\gamma} e^0 + X^{*\gamma} e^0 \gamma\hat{x}_t = X^{*\gamma}(1+\gamma\hat{x}_t) \\ X_t Y_t &= X^* Y^* e^{\hat{x}_t+\hat{y}_t} \Longrightarrow X^* Y^* e^0 + X^* Y^* e^0 \hat{x}_t + X^* Y^* e^0 \hat{y}_t \\ &= X^* Y^* (1+\hat{x}_t+\hat{y}_t) \end{aligned}$$

- Recordemos el sistema que teníamos en el ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_t} &= \beta E_z \left[\frac{1}{c_{t+1}} \alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} \right] \\ c_t &= z_t k_t^\alpha - k_{t+1} \end{aligned}$$

- Usando lo aprendido:

$$\begin{aligned} (c^*)^{-1}(1-\hat{c}_t) - \alpha\beta (c^*)^{-1} (k^*)^{\alpha-1} E_t(1-\hat{c}_{t+1}+\hat{z}_{t+1}+(\alpha-1)\hat{k}_{t+1}) &= 0 \\ (c^*)(1+\hat{c}_t) - (k^*)^\alpha (1+\hat{z}_t+\alpha\hat{k}_t) + k^*(1+\hat{k}_{t+1}) &= 0 \end{aligned}$$

- Por tanto:

$$\begin{aligned} -\hat{c}_t + E_t\left[\hat{c}_{t+1} - \hat{z}_{t+1} - (\alpha-1)\hat{k}_{t+1}\right] &= 0 \\ c^*\hat{c}_t - (k^*)^\alpha (\hat{z}_t + \alpha\hat{k}_t) + k^*\hat{k}_{t+1} &= 0 \end{aligned}$$

- adicionemos:

$$\hat{z}_{t+1} = \rho\hat{z}_t + \epsilon_{t+1}$$

- En notación matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -(\alpha-1) & 1 \\ 0 & k^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \\ E_t \hat{c}_{t+1} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -(k^*)^\alpha & -(k^*)^\alpha \alpha & c^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_t \\ \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_{t+1} = 0$$

- Para presentar la solución general de **Blanchard y Kahn (1980)** definamos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ Ey' \end{bmatrix} &= -A^{-1}B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - A^{-1}Cv' \\ &= F \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + Gv' \end{aligned}$$

  donde x (n) son las variables de estado (exógenas y endógenas) e y (m) las variables de control. Finalmente v (con n_v) son los shocks.

- Apliquemos la descomposición de Jordan a F

$$F = HJH^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_{n+m} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n+m} \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_{n+m} \end{bmatrix}^{-1}$$

  donde d_i son los autovectores y λ_i son los autovalores, los cuales están ordenados de tal manera que:

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_{n+m}|$$

- Denotemos por h el número de autovalores que se encuentra fuera del círculo unitario.

Proposición (Condiciones de Blanchard y Kahn)

(1) Si $h = m$ entonces la solución del sistema es única. (2) Si $h > m$ entonces no existe solución para el sistema. (3) Si $h < m$ entonces existen infinitas soluciones (indeterminancia)

- Denotemos por J_1 la matriz con autovalores dentro el círculo unitario y J_2 con los restantes autovalores.

$$\begin{bmatrix} x' \\ Ey' \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} J_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 \end{bmatrix} H^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} v'$$

- Aplicando algo de álgebra matricial:

$$H^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ Ey' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 \end{bmatrix} H^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + H^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} v'$$

- Definamos:

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \ y \ H^{-1} = \begin{bmatrix} H^{11} & H^{12} \\ H^{21} & H^{22} \end{bmatrix}$$

- Más aún, definamos:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{11} & H^{12} \\ H^{21} & H^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{11} & H^{12} \\ H^{21} & H^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

- Entonces tenemos un nuevo sistema completamente desacoplado entre variables estables e inestables:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}' \\ E\bar{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \end{bmatrix} v'$$

- El concepto que utiliza este método es el siguiente: *procesos inestables se resuelven iterando adelante mientras que procesos estables se resuelven iterando hacia atrás.*

Métodos de Solución

Métodos Basados en la Ecuación de Euler Estocástica: Métodos de Perturbación

- Concentremonos en la parte inestable:

$$E\bar{y}' = J_2\bar{y} + \bar{G}_2 v'$$

- Resolviendo para $\bar{y}$ tenemos:

$$\bar{y} = J_2^{-1}E\bar{y}' - J_2^{-1}\bar{G}_2 v'$$

- Iterando adelante:

$$\bar{y}' = J_2^{-1}E\bar{y}'' - J_2^{-1}\bar{G}_2 v''$$

  y aplicando expectativa:

$$E\bar{y}' = J_2^{-1}E\bar{y}'' - J_2^{-1}E\bar{G}_2 v''$$

- Sustituyendo:

$$\bar{y} = J_2^{-2}E\bar{y}'' - J_2^{-2}E\bar{G}_2 v'' - J_2^{-1}\bar{G}_2 v'$$

Métodos de Solución

Métodos Basados en la Ecuación de Euler Estocástica: Métodos de Perturbación

- Iterando:

$$\bar{y} = -J_2^{-1}\bar{G}_2 v' - J_2^{-2}E\bar{G}_2 v'' - J_2^{-3}E\bar{G}_2 v'''...$$

- Pero note que $E[v'] = E[v''] = ... = 0$, entonces:

$$\bar{y} = -J_2^{-1}\bar{G}_2 v'$$

- Sanemos que:

$$\bar{y} = H^{21}x + H^{22}y \;\; y \;\; G_2 = H^{21}G_1 + H^{22}G_2$$

- Por tanto *la regla de política de las variables de control* es:

$$H^{21}x + H^{22}y = -J_2^{-1}\left(H^{21}G_1 + H^{22}G_2\right)v'$$
$$\Rightarrow y = -\left(H^{22}\right)^{-1}H^{21}x - \left(H^{22}\right)^{-1}J_2^{-1}\left(H^{21}G_1 + H^{22}G_2\right)v'$$

  Este es el mapeo: estados y shocks a controles.

- Sólo queda *la regla de política para las variables de estado*. Recodemos:

$$x' = F_{11}x + F_{12}y + G_1 v'$$

- Entonces:

$$x' = \left[F_{11} - F_{12}\left(H^{22}\right)^{-1} H^{21}\right] x + \left[G_1 - \left(H^{22}\right)^{-1} J_2^{-1}\left(H^{21}G_1 + H^{22}G_2\right)\right] v'$$

de nuevo, es el mapeo: estados y shocks a estados el siguiente período.

- La alternativa cuando A es no invertible es usar el **método de coeficientes indeterminados de Uhlig (1997).**
- Es un método de perturbación que resuelve el sistema de ecuaciones en diferencias estocástico linealizado.
- Definamos:
  - x vector $m \times 1$ de variables de estado endógenas: en el ejemplo k
  - y vector $n \times 1$ de variables de control: en el ejemplo c
  - z vector $k \times 1$ de variables de estado exógenas: en el ejemplo z
- El método ademas de distinguir por tipo de variable también distingue por tipo de ecuación (no expectacional, expectacional y shocks).
- El sistema lineal puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} Ax' + Bx + Cy + Dz &= 0 \\ E\left[Fx'' + Gx' + Hx + Jy' + Ky + Lz' + Mz\right] &= 0 \\ z' = Nz + \epsilon' \qquad & E[\epsilon'] = 0 \end{aligned}$$

Métodos de Solución

Métodos Basados en la Ecuación de Euler Estocástica: Métodos de Perturbación

- Como el sistema es lineal podemos realizar la siguiente conjetura de solución para la funciones de política:

$$\begin{aligned} x' &= Px + Qz \\ y &= Rx + Sz \end{aligned}$$

- El objetivo del método es determinar los coeficientes P, Q, R y S tal que la conjetura anterior sea una solución.
- Recordemos el sistema log-linealizado del ejemplo:

$$\begin{aligned} -\hat{c}_t + E_t\left[\hat{c}_{t+1} - \hat{z}_{t+1} - (\alpha-1)\hat{k}_{t+1}\right] &= 0 \\ c^*\hat{c}_t - (k^*)^\alpha\left(\hat{z}_t + \alpha\hat{k}_t\right) + k^*\hat{k}_{t+1} &= 0 \\ \hat{z}_{t+1} = \rho\hat{z}_t + \epsilon_{t+1} & \qquad E[\epsilon_{t+1}] = 0 \end{aligned}$$

Métodos de Solución

Métodos Basados en la Ecuación de Euler Estocástica: Métodos de Perturbación

- Recordemos:

$$\begin{aligned} Ax' + Bx + Cy + Dz &= 0 \\ E\left[Fx'' + Gx' + Hx + Jy' + Ky + Lz' + Mz\right] &= 0 \\ z' = Nz + \epsilon' & \qquad E[\epsilon'] = 0 \end{aligned}$$

- Comparemos:

$$\begin{aligned} c^*\hat{c}_t - (k^*)^\alpha\left(\hat{z}_t + \alpha\hat{k}_t\right) + k^*\hat{k}_{t+1} &= 0 \\ E_t\left[-\hat{c}_t + \hat{c}_{t+1} - \hat{z}_{t+1} - (\alpha-1)\hat{k}_{t+1}\right] &= 0 \\ \hat{z}_{t+1} = \rho\hat{z}_t + \epsilon_{t+1} & \qquad E[\epsilon_{t+1}] = 0 \end{aligned}$$

- Entonces:

$$A = k^* \;\; B = -\alpha\left(k^*\right)^\alpha \;\; C = c^* \;\; D = -\left(k^*\right)^\alpha$$
$$F = 0 \;\; G = -(\alpha-1) \;\; H = 0 \;\; J = 1 \;\; K = -1 \;\; L = -1 \;\; M = 0$$
$$N = \rho$$

- *Solución de Uhlig (1997)*: reemplazando la conjetura en la primera ecuación del sistema:

$$\begin{aligned} A\,(Px+Qz)+Bx+C\,(Rx+Sz)+Dz &= 0 \\ (AP+B+CR)x+(AQ+CS+D)z &= 0 \end{aligned}$$

- reemplazando la conjetura en la segunda ecuación del sistema:

$$E[F(P(Px+Qz)+Q(Nz+\epsilon'))+G(Px+Qz)+Hx$$
$$+J(R(Px+Qz)+S(Nz+\epsilon'))+K(Rx+Sz)+L(Nz+\epsilon')+Mz]=0$$

agrupando y usando $E[\epsilon']=0$:

$$(FP^2+GP+H+JRP+KR)x$$
$$+(FPQ+FQN+GQ+JRQ+JSN+KS+LN+M)z=0$$

- Como ambas ecuaciones deben cumplirse para todo x y z se cumple:

$$\begin{aligned} AP+B+CR &= 0 \\ AQ+CS+D &= 0 \\ FP^2+GP+H+JRP+KR &= 0 \\ FPQ+FQN+GQ+JRQ+JSN+KS+LN+M &= 0 \end{aligned}$$

- Note que la primera y la tercera ecuaciones sólo contienen P y R. Resolviendo para R en la primera y reemplanzando en la tercera:

$$FP^2+GP+H+J(-C^{-1}AP-C^{-1}B)P+K(-C^2AP-C^{-1}B)=0$$

- Agrupando:

$$\begin{aligned} (F-JC^{-1}A)P^2-(JC^{-1}B+KC^{-1}A-G)P-(KC^{-1}B-H) &= 0 \\ \Psi P^2-\Gamma P-\Theta &= 0 \end{aligned}$$

- Tenemos una matriz cuadrática en P.

Teorema (Solución de una Ecuación Matricial Cuadrática)

Para resolver la matriz cuadrática:

$$\Psi P^2 - \Gamma P - \Theta = 0$$

para la matriz P *de tamaño* $m \times m$, *dadas las matrices* Ψ, Γ, Θ, defina las siguientes matrices de tamaño $2m \times 2m$.

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Gamma & \Theta \\ I_m & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \ y \ \Delta = \begin{bmatrix} \Psi & 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & I_m \end{bmatrix}$$

donde I_m es la matriz identidad de tamaño m y $0_{m\times m}$ es una matriz de ceros de tamaño $m \times m$.
Si $d_1, ..., d_m$ son los autovectores generalizados correspondientes a los $\lambda_1, ..., \lambda_m$ autovalores generalizados de Ξ con respecto a Δ entonces:

$$P = \Omega \Lambda \Omega^{-1}$$

con $\Omega = [d_1, ..., d_m]$ y $\Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_m)$. Se aplica la denominada descomposición QZ. La solución P es estable si $|\lambda_i| < 1$ para todo $i = 1, ..., m$.

- Una vez que encontramos P hemos recorrido más de la mitad del camino:

$$R = -C^{-1}(AP + B)$$

- Nos queda resolver por S y Q. Volvamos al sistema y usemos la segunda ecuación:

$$S = -C^{-1}(AQ + D)$$

- Reemplacemos en la última ecuación:

$$(FP + G + JR - KC^{-1}A)Q + (F - JC^{-1}A)QN - JC^{-1}DN \\ -KC^{-1}D + LN + M = 0$$

Métodos de Solución

Métodos Basados en la Ecuación de Euler Estocástica: Métodos de Perturbación

- Problema, resolver por Q no es trivial. Usemos el siguiente resultado:

$$vec(AXB) = (B^T \otimes A)vec(X)$$

- ¿Que es vec?

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Longrightarrow vec(A) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

- Usando el resultado anterior tenemos:

$$\begin{aligned} vec(Q) \quad &= \quad (I \otimes (FP + G + JR - KC^{-1}A) + (N^T \otimes (F - JC^{-1}A)))^{-1} \times \\ &\quad\quad vec(JC^{-1}DN + KC^{-1}D - LN - M) \end{aligned}$$

- Sólo que reordenar Q y después calcular S.

Interpretación

- Las funciones de política en el caso del Modelo de Ramsey estocástico son:

$$\begin{aligned} \hat{k}_{t+1} &= \phi_{kk}\hat{k}_t + \phi_{kz}\hat{z}_t \\ \hat{c}_t &= \phi_{ck}\hat{k}_t + \phi_{cz}\hat{z}_t \\ \hat{z}_t &= \rho\hat{z}_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned}$$

- Note que $\hat{x} = \log(x) - \log(x^*)$, por tanto los coeficientes representan elasticidades de corto plazo.
  - ϕ_{kk} por ejemplo indica: ¿Qué porcentaje del desequilibrio $\hat{k}_t$ se cerrará en un período?
- Una forma alternativa (y a veces útil) de plantear el problema es:

$$\begin{aligned} \log(k_{t+1}) &= \log(k^*) + \phi_{kk}\hat{k}_t + \phi_{kz}\hat{z}_t \\ \log(c_t) &= \log(c^*) + \phi_{ck}\hat{k}_t + \phi_{cz}\hat{z}_t \\ \log(z_t) &= \rho\hat{z}_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned}$$

Análisis de la Dinámica
Simulaciones

- Suponga $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2_\epsilon)$.
- Usar un generador de números aleatorio para generar una serie de "muchos" shocks:

$$eps = 0 + sig * randn(10000, 1);$$

- Generar una serie de productividades:

$$\hat{z}[j] = \rho \hat{z}[j-1] + eps[j],\ j = 1, ..., 10000$$

con $\hat{z}[1] = 0$.
- Recuperar recursivamente las variables usando las funciones de política, los shocks generados y suponiendo que se parte del estado estacionario. Ejemplo:

$$k[j] = \exp\left(\log(k^*) + \phi_{kk}\left[\log(k[j-1]) - \log(k^*)\right] + \phi_{kz}\hat{z}[j]\right),\ j = 1, ..., 10000$$

con $\log(k[1]) = \log(k^*)$.
- Una vez generadas las series del modelo (capital, consumo, producto, etc) se pueden calcular momentos simulados (media, varianza, correlaciones, etc) para para ser comparados con sus contrapartes en los datos.

Análisis de la Dinámica
Funciones de Impulso Respuesta

- Se trata de analiza el efecto dinámica sobre las variables (respuesta) de un shock de una sola vez (impulso).
- Definir el impulso inicial:

$$\epsilon_1 = \sigma_\epsilon \quad y \quad \epsilon_j = 0\, \forall\, j > 1$$

- Calcular el comportamiento del shock de productividad bajo este impulso inicial:

$$\begin{aligned} \hat{z}_2 &= \rho[\hat{z}_1 = 0] + \epsilon_1 \\ \hat{z}_3 &= \rho \hat{z}_2 \\ &\vdots \\ \hat{z}_j &= \rho \hat{z}_{j-1} \end{aligned}$$

Note la persistencia del shock de productividad.

- Calcular el comportamiento de las variables bajo este impulso inicial. Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\hat{k}_2 &= \phi_{kk}[\hat{k}_1 = 0] + \phi_{kz}\hat{z}_1 \\
\hat{k}_3 &= \phi_{kk}\hat{k}_2 + \phi_{kz}\hat{z}_2 \\
&\vdots \\
\hat{k}_j &= \phi_{kk}\hat{k}_{j-1} + \phi_{kz}\hat{z}_{j-1}
\end{aligned}
$$

- Con la serie de capital se puede construir la del consumo y además otras de interés, como el producto.
- Las FIRs entonces son un gráfico con los desvíos en el eje vertical y los períodos en el eje horizontal.
  - Muestran la persistencia de efecto del shock sobre cada variables.
  - Permiten dar una medida cuantitativa del efecto del shocks en cada momento del tiempo (y además del efecto completo, la suma de los efectos temporales).
  - Permiten tener una medida de la duración del efecto del shock.